

## 内部構造としての温度場をもつ凝縮相からの 2次元蒸発・凝縮流のシミュレーション

大西 善元、村山太一

鳥取大学工学部応用数理工学科

A simulation of two dimensional flows of a vapor due to evaporation and condensation from the condensed phase with finite thermal conductivity

Yoshimoto ONISHI and Taichi MURAYAMA

Department of Applied Mathematics and Physics, Faculty of Engineering,  
Tottori University, Tottori 680-8552, Japan

E-mail: onishi@damp.tottori-u.ac.jp

**Abstract:** Motions of a vapor in a two dimensional space due to evaporation process occurring at the interface of the condensed phase have been studied based on the *fluid dynamic formulation*. The condensed phase, which is embedded in a plane adiabatic solid wall of infinite expanse, has a temperature field as its internal structure because of its thermal conductivity being finite compared to that of its vapor. Owing to this internal structure, the temperature of the interface itself can not be specified beforehand in the boundary conditions, which complicates the problem. The present study, which is a trial in dealing with two-dimensional problems of this kind, is concerned with one of the prototype problems with particular attention being paid to the effects of the finite thermal conductivity ratio of the condensed phase on the flow fields.

**Key Words:** Fluid Dynamic Formulation, Two dimensional flows due to Phase changes, Condensed phase with finite thermal conductivity ratio, Condensed phase with internal structure.

### 1. はじめに

凝縮相のもつ有限熱伝導性が界面での蒸発・凝縮過程によって形成される流れ場に大きな影響を及ぼすことが最近の一連の研究 [1] – [4] によって明らかにされている。その最たる影響は、蒸発・凝縮量およびエネルギー流量と潜熱パラメーターとの関係を大きく変化させるということであろう。通常、凝縮相のもつ熱伝導係数は気相のそれに比べて一桁は大きい。この事実を踏まえて、凝縮相の熱伝導係数を気相のそれに対して思い切って無限大とした場合には、殆どのこれまでの解析はそうであるが、蒸発・凝縮量およびエネルギー流量は潜熱パラメーターと共に比較的単純に増加する。しかし、凝縮相の有限熱伝導性を陽に考慮した場合、流量は潜熱パラメーターに対して単純な振る舞いをするのではなく、そのパラメーターの特定な値に対して最大値をとるという興味ある振る舞いをする。このように、凝縮相の有限熱伝導性とのカップリングにおいて、潜熱パラメーターの果たす役割が定性的に大きく異なってくることは、理論的に興味があるだけでなく、工学的にも非常に重要である。熱・エネルギー輸送システムにおける作動流体の選択に大きく関わるからである。

凝縮相の熱伝導性が気相のそれに比べて有限か無限大かということは、凝縮相内にその内部構造として

の温度場が形成されるか否かということに関わる。後者の場合には、凝縮相内では温度は単純に一樣となっており、凝縮相界面での温度は境界条件として予め指定できる。これに対して、前者の場合、凝縮相における温度場構造の存在のために、凝縮相界面では境界条件としての界面温度の指定ができない、つまり、界面温度は未知の量 (一般的には、時間の関数) で、解の一部として決まることになる。非常に厄介で困難を伴う問題なのである。このような状況にも拘わらず、凝縮相の有限熱伝導性を考慮して、1次元問題ではあるが、我々の研究室においては理論解析、数値シミュレーション解析等を通して幾多の流れ場を定性的かつ定量的に調べてきた。その結果、いくつかの新たな事実をも解明している。ここでは、2次元問題においても、凝縮相のもつ有限熱伝導性の影響を調べておきたい。その手始めとして、無限平面断熱壁中に埋め込まれた有限の熱伝導率をもつ有限幅の凝縮相を考え、それからの2次元半無限空間への蒸発・凝縮問題を取り上げた。2次元問題のプロトタイプ的な問題である。相変化現象は、界面近傍での系の極度な非平衡性による。したがって、支配方程式系は、当然ながら、気体論方程式系 [5] であるべきであるが、ここでは、それと等価な結果を与え、かつ、比較的扱い易い流体力学的レベルでの支配系、つまり、「流体力学的定式化 [6]」を

使う。この主な理由は、前述のように、凝縮相の界面温度が未知量であるため、界面での境界条件としての温度指定ができないという新たに直面した困難さにある。この困難を克服するためには、未知の界面温度を時々刻々予測する適切な方法の開発が必要となるのは当然で、既に、支配方程式系と境界条件から理論的に界面温度予測の条件式を導出しており ([1] – [2] 参照)、その有効性も確かめてはいる。つまり、その方法を気体論方程式系と流体力学的定式化という2つの支配方程式系に基づくシミュレーション・スキームに組み込んで種々の問題 (1次元問題) を解析し、その有効性を確かめた訳である。界面温度については比較的速やかに適切な値を推定するが、それでも気体論方程式系に基づく解析となるとやはり相当膨大な計算時間を必要とする。このような事情を踏まえれば、気体論方程式系の代わりに、流体力学的レベルでは等価な流体力学的定式化を支配系として用いて解析を進める理由が分かるであろう。

## 2. 問題の定式化

$x - y$  平面上において、無限の広がりをもつ平面断熱壁中に、幅  $L = X_2 - X_1$ 、厚さ  $D$  の凝縮相が埋め込まれているとして、それからの蒸発・凝縮過程によって形成される半無限空間における流れ場を考える (Fig. 1 参照)。この系は、初期に、温度  $T_0$  で完全静止平衡状

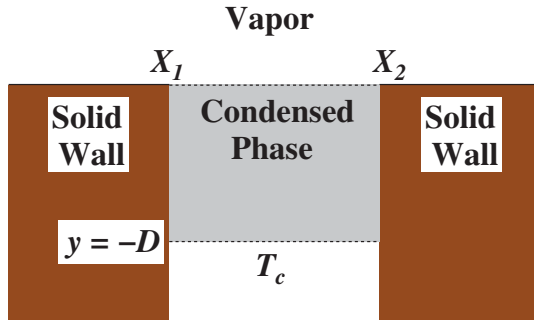


Fig. 1: A schematic view of a two dimensional flow of a vapor from or onto its condensed phase with finite thermal conductivity, which is embedded in the adiabatic plane solid wall of infinite expanse placed at  $y = 0$ .  $L = X_2 - X_1$  and  $D$  are the width and the thickness of the condensed phase, respectively.

態にあるとし、そのときの気相の密度と圧力をそれぞれ  $\rho_0$ 、 $P_0$  とする。ある瞬間 ( $t = 0$ ) に、凝縮相の端 ( $y = -D$ ) の温度を  $T_0$  から  $T_c$  へと変化させる。つまり、高温あるいは低温浴槽に接触させる。一定時間経過後、凝縮相内部を通しての熱伝導によって、凝縮相界面 ( $y = 0$ ,  $X_1 < x < X_2$ ) の温度が変化し、それによって、界面で蒸発あるいは凝縮過程が生じ、気相中に種々の波動を伴った非定常流れ場が形成される。当然ながら、気相に対する凝縮相の有限熱伝導性を考慮すると、凝縮相にはその内部構造として温度場が形成される。流れ場に対する支配系としての流体力学的定

式化 [6] は、次のような形で与えられる：まず、凝縮相内の温度場  $\tilde{T}$  に対しては、 $\kappa_c$  を凝縮相の温度拡散係数とすれば

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \kappa_c \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{凝縮相内部で}) \quad (1)$$

次に、気相の流れ場に対しては、通常の圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + P \delta_{ij} - \tau_{ij} \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

$$P = \rho R T \quad (3)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \quad (4)$$

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (5)$$

$$h = \gamma e = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R T \quad (6)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{T}{T_0}, \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{T}{T_0}, \quad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} \quad (7)$$

である。ここで、 $t$  は時間、 $x_i = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$  は空間座標、 $\rho$  は気体の密度、 $u_i$  は速度ベクトル、 $P$  は圧力、 $T$  は温度、 $e$  および  $h$  はそれぞれ単位質量当たりの内部エネルギーとエンタルピー、 $\tau_{ij}$  は粘性応力テンソル、 $q_i$  は熱流束ベクトルである。 $\delta_{ij}$  は Kronecker の delta を表わす。 $\mu$  と  $\lambda$  は粘性係数および熱伝導係数で、温度  $T$  に比例する ( $\mu_0$ 、 $\lambda_0$  は温度  $T_0$  での粘性係数と熱伝導係数)。 $R$  は単位質量当たりの気体定数、 $\gamma$  は比熱比 (ここでは、 $\gamma = 5/3$ ) で、 $c_v$  と  $c_p$  はそれぞれ気体の定積比熱と定圧比熱である。

初期条件は、この問題の場合

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T} &= T_0 && (\text{凝縮相内部の至る所で}) \\ u_i &= 0, \quad P = P_0, \quad T = T_0 && (\text{気相の至る所}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。凝縮相界面 ( $y = 0$ ,  $X_1 < x < X_2$ ) での境

界条件は、流体力学的定式化においては

$$\left. \begin{aligned} u_i t_i &= 0 \\ \frac{P - P_W}{P_W} &= C_4^* \frac{u_i n_i}{(2RT_W)^{1/2}} \\ \frac{T - T_W}{T_W} &= d_4^* \frac{u_i n_i}{(2RT_W)^{1/2}} \\ -\lambda_c \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} n_i \\ &= q_i n_i + \left( h_L + \frac{1}{2} u^2 \right) \rho u_i n_i - u_i \tau_{ij} n_j \\ C_4^* &= -2.132039, \quad d_4^* = -0.446749 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で与えられる。上の条件 (9) は、気体論方程式系 [5] に基づいた凝縮性気体の一般的な運動に対する弱非線形漸近解析 [7] から得られた巨視的条件で、最後の関係式は界面でのエネルギー流束連続条件を表わす。 $\lambda_c$  は凝縮相の熱伝導係数である。 $n_i$  は境界面上での外向き単位法線ベクトル、 $t_i$  は境界面上における一つの単位接線ベクトルである。(9) 式における  $T_W$  は凝縮相の界面温度で未だ未知の量である (時間の未知関数)。 $P_W$  は温度  $T_W$  に対する飽和蒸気圧力で、両者は次の Clapeyron-Clausius の式

$$\frac{P_W}{P_0} = \exp \left[ -\Gamma \left( \frac{T_0}{T_W} - 1 \right) \right], \quad \Gamma \equiv \frac{h_L}{RT_0} \quad (10)$$

で結び付いている。上式における  $h_L$  は単位質量当たりの潜熱で、その無次元数  $\Gamma$  は潜熱パラメーターと呼ばれている。 $\Gamma$  の値は、例えば  $\text{H}_2\text{O}$  の場合  $\Gamma = 19$  ( $T_0 = 25^\circ\text{C}$ )、アルゴンの場合  $\Gamma = 9$  ( $T_0 = -186^\circ\text{C}$ )、アンモニアの場合  $\Gamma = 8$  ( $T_0 = 25^\circ\text{C}$ ) 程度である。

また、断熱平面壁上 ( $y = 0, x < X_1, x > X_2$ ) では

$$u_i n_i = u_i t_i = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = 0 \quad (11)$$

凝縮相の端点と側壁上では

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T} &= T_c \quad (y = -D, X_1 < x < X_2) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} n_i &= 0 \quad (x = X_1, -D < y < 0) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} n_i &= 0 \quad (x = X_2, -D < y < 0) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

で与えられる。ここで、 $T_c$  は恒温浴槽の温度である。

### 3. 特性無次元パラメーター

さて、解析に際して、長さのスケールとして、 $L = X_2 - X_1$  を、速度のスケールとして初期状態での気体の音速  $c_0 = (\gamma RT_0)^{1/2}$ 、そして時間スケールとして  $\tau_0 = L/(2RT_0)^{1/2}$  をとる。これに加えて、初期状態での流体力学的諸量を基準量にとる。これらによっ

て、支配方程式系および初期、境界条件を適切に無次元化すれば、系の振る舞いを特性づける無次元パラメーターとして

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_c}{T_0}, \quad \frac{D}{L}, \quad \Gamma &\equiv \frac{h_L}{RT_0}, \quad \frac{\lambda_c}{\lambda_0}, \quad \frac{\kappa_c}{\kappa_0} \\ Re &\equiv \frac{\rho_0 c_0 L}{\mu_0}, \quad Pr \equiv \frac{c_p \mu_0}{\lambda_0} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を得る。ここで、 $\lambda_c/\lambda_0$  は凝縮相の熱伝導係数比、 $\kappa_c/\kappa_0$  は温度拡散係数比、 $Re$  は Reynolds 数、 $Pr$  は Prandtl 数である。 $\mu_0, \lambda_0, \kappa_0 \equiv \lambda_0/(\rho_0 c_p)$  は、それぞれ、初期状態での気体の粘性係数、熱伝導係数および温度拡散係数である。また、将来行われるであろう気体論方程式系に基づく結果との比較のために必要となる  $Kn \equiv l_0/L$  で定義される Knudsen 数  $Kn$  を導入すると、Knudsen 数と Reynolds 数  $Re$  との間に  $Kn = (8\gamma/\pi)^{1/2}(1/Re)$  なる関係がある。ここで、 $l_0$  は初期状態での分子の平均自由行路で、 $l_0 \equiv (\mu_0/P_0)(8RT_0/\pi)^{1/2}$  で定義される。

### 4. 結果と考察

(13) 式における無次元パラメーターのいくつかのセットに対してシミュレーションを行った。スキームは単純明快な MacCormack 法である。計算領域は、基本的には、 $-10 \leq x/L \leq 10, -D/L \leq y/L \leq 10$  とし、領域の境界線上では、単純な流出条件ではなく、これまでも使用してきた方法であるが、1 階の線形波動方程式でもって各種の disturbance を歪ませることなく計算領域外に送り出す方法を採用した。

さて、結果のグラフを次に示すが、全ての結果において、凝縮相内部の温度場は、単純な分布で、凝縮相の側壁が断熱されているため 1 次元の場合と変わらない。Figure 2 に速度ベクトル線図を示す。明らかに、凝縮相界面 ( $-0.5 \leq x/L \leq 0.5, y/L = 0$ ) で、蒸発過程が生じ、流れが 2 次元領域に広がっていく様子が見える。今の場合、時間が  $t/\tau_0 = 2.5$  から  $t/\tau_0 = 10.0$  程度になると、界面近傍での蒸発流の速さは  $c_0$  (初期状態での気相の音速) の約 5% から 8% 程度となることが分かる。圧力、密度および温度場については、Figs. 3–5 に、それぞれ時刻  $t/\tau_0 = 2.5, 5.0$  および  $10.0$  での鳥瞰図で示す。温度  $T_c$  の高温浴槽から熱が凝縮相内を伝わり、凝縮相界面に達して蒸発過程が生じる。その過程に付随して生成された弱い衝撃波、接触領域が 2 次元領域を伝播していく様子が捉えられている。断熱壁と接している凝縮相界面の端点 ( $y/L = 0, x/L = \pm 0.5$ ) で、境界条件が不連続となっているために、その近傍での諸量、特に、圧力と密度に overshoot している部分が見られる。この現象は避け難く、現在のところ、如何ともし難い。しかしながら、大域的な流れ場としては、合理的な様相を示しており、この境界条件の不連続性による overshoot の影響は大きくはないように思える。次に、 $y/L = 0.0, 0.1$  および  $1.0$  なる断面での  $x/L$  に対する圧力、密度および温度分布を Figs. 6–8 に示す。 $y/L = 0.0$  なる断面上では、前



述した境界条件の不連続性のため、諸量の分布にかなり大きな overshoot が現れているが、界面あるいは壁面から離れるにしたがって、合理的な分布状態となっている。圧力、密度、温度分布は、初期状態に近い時間帯では、異なる様相を示しているが、時間経過と共に同様な分布をもつようになる。本来は、密度と温度分布には、弱い衝撃波背後に接触領域が認識できるはずであるが、波動が2次元領域に減衰しつつ広がっていくため、明確には把握できない。

最後に、この種の2次元問題では、多大な計算時間を必要とするため、現時点では、計算領域の拡大もままならず、十分な時間発展を追うことができなかった。しかし、内部構造としての温度場をもつ凝縮相からの2次元蒸発・凝縮問題を始めて扱ったことになる。残念ながら、気体論方程式系に基づいたシミュレーション結果が、現在のところ、存在しないので、結果の比較検討はできないが、ここでの「流体力学的定式化」で十分定性的には正しい結果が得られていると考えている。今後、気体論方程式系に基づく数値シミュレーションも行い、結果の比較検討を行いたい。さらに、これらの結果を踏まえて、ヒートパイプ内の実際的な流れ場のシミュレーションへと発展させるつもりである。

この研究に対して、宇宙科学研究所情報解析センターの支援を受けた。

## 参考文献

- [1] Y. Onishi and K. Yamada: "Evaporation and Condensation from or onto the Condensed Phase with an Internal Structure," *Rarefied Gas Dynamics* (AIP Conference Proceedings: Volume 663), edited by A.D. Ketsdever and E.P. Muntz (American Institute of Physics, New York, 2003) pp. 630–637.
- [2] Y. Onishi, K. Yamada and T. Nakajima: "Simulation of Evaporation Flows from the Condensed Phase with an Internal Structure based on the Fluid Dynamic Formulation," *Rarefied Gas Dynamics* (AIP Conference Proceedings: Volume 663), edited by A.D. Ketsdever and E.P. Muntz (American Institute of Physics, New York, 2003) pp. 654–661.
- [3] Y. Onishi and K. Yamada: "Evaporation and Condensation Flows of a Vapor-Gas Mixture from or onto the Condensed Phase with an Internal Structure," *Rarefied Gas Dynamics*, edited by M. Capitelli (American Institute of Physics, Melville, New York, 2005), pp. 485–490.
- [4] Y. Onishi and T. Ooshida: "Flows of a Vapor due to Phase Change Processes at the Condensed Phases with Temperature Fields as their Internal Structures," *Rarefied Gas Dynamics*, edited

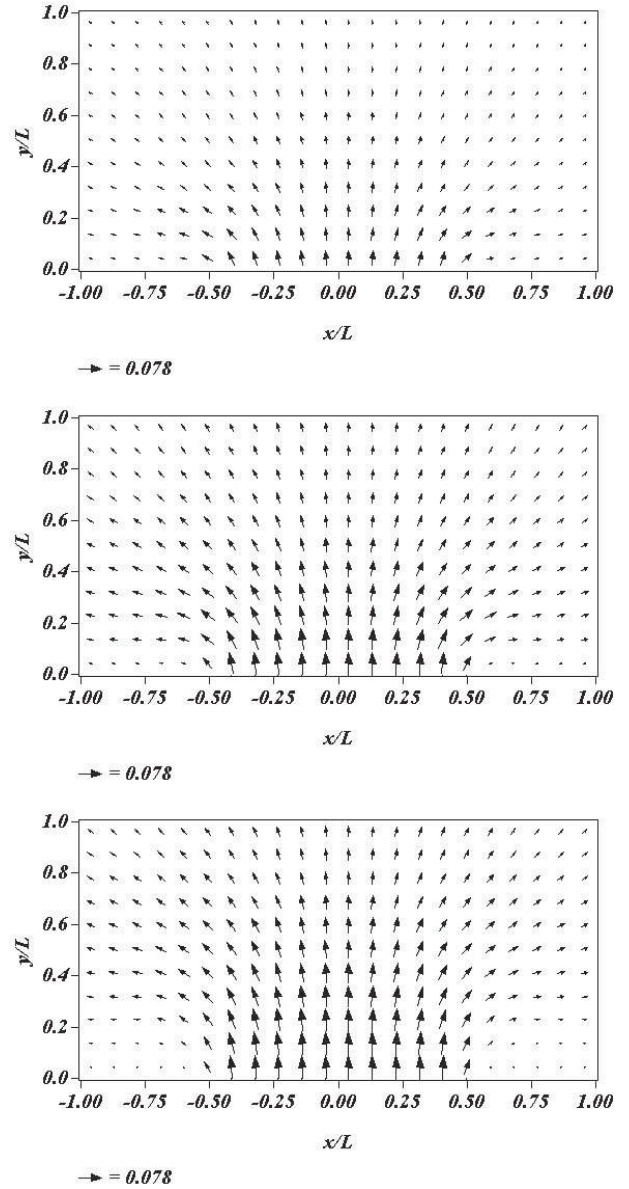


Fig. 2: The diagrams of the velocity vector  $(u, v)/c_0$  at different times  $t/\tau_0 = 2.5, 5.0$  and  $10.0$ . The interface of the condensed phase is at  $y/L = 0$  and  $-0.5 \leq x/L \leq 0.5$ .  $T_c/T_0 = 1.5$ ,  $D/L = 0.1$ ,  $\Gamma = 11$ ,  $\lambda_c/\lambda_0 = 30.0$ ,  $\kappa_c/\kappa_0 = 0.32$ ,  $Re = 412.03$ , ( $Kn = 0.005$ ),  $Pr = 1.0$ . **Above:**  $t/\tau_0 = 2.5$ . **Middle:**  $t/\tau_0 = 5.0$ . **Bottom:**  $t/\tau_0 = 10.0$ .

by M. Capitelli (American Institute of Physics, Melville, New York, 2005), pp. 644–649.

- [5] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross and M. Krook: "A model for collision processes in gases. (I) Small amplitude processes in charged and neutron one-component systems," *Phys. Rev.* **94** (1954) 511–525.

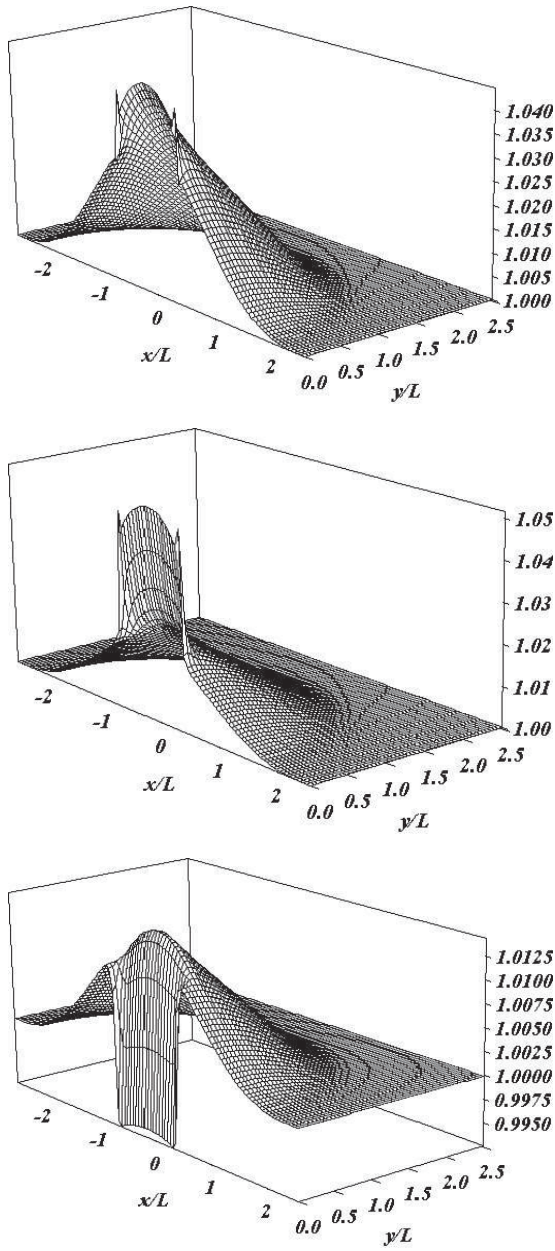


Fig. 3: The contours of the pressure, density and temperature at time  $t/\tau_0 = 2.5$ . The interface of the condensed phase is at  $y/L = 0$  and  $-0.5 \leq x/L \leq 0.5$ .  $T_c/T_0 = 1.5$ ,  $D/L = 0.1$ ,  $\Gamma = 11$ ,  $\lambda_c/\lambda_0 = 30.0$ ,  $\kappa_c/\kappa_0 = 0.32$ ,  $Re = 412.03$ ,  $(Kn = 0.005)$ ,  $Pr = 1.0$ . **Above:** pressure  $P/P_0$ . **Middle:** density  $\rho/\rho_0$ . **Bottom:** temperature  $T/T_0$ .

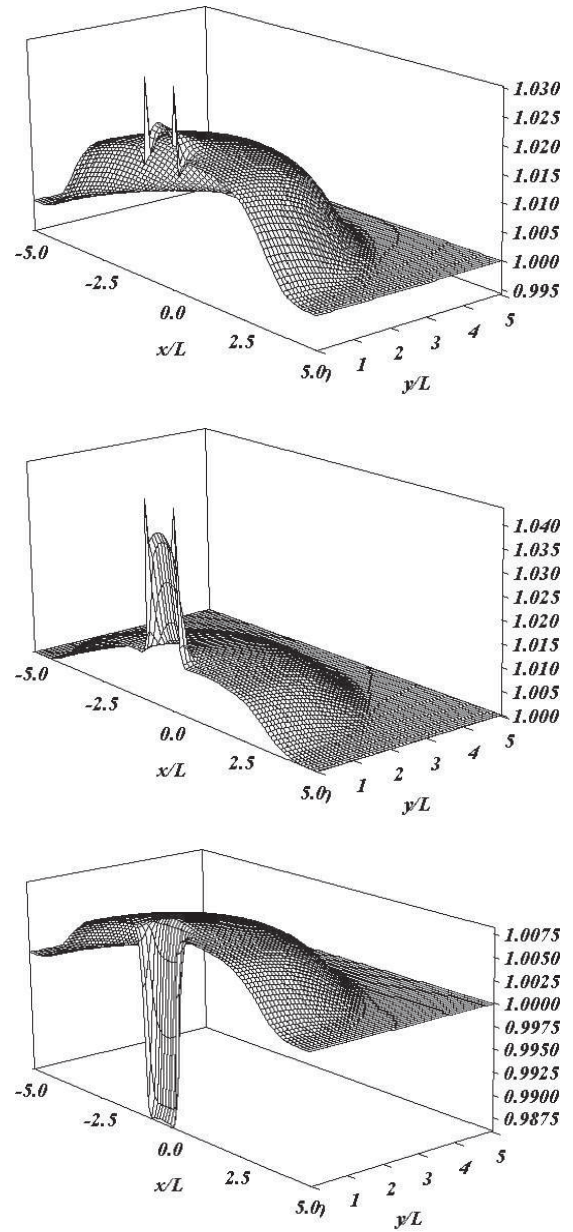


Fig. 4: The contours of the pressure, density and temperature at time  $t/\tau_0 = 5.0$ . The interface of the condensed phase is at  $y/L = 0$  and  $-0.5 \leq x/L \leq 0.5$ .  $T_c/T_0 = 1.5$ ,  $D/L = 0.1$ ,  $\Gamma = 11$ ,  $\lambda_c/\lambda_0 = 30.0$ ,  $\kappa_c/\kappa_0 = 0.32$ ,  $Re = 412.03$ ,  $(Kn = 0.005)$ ,  $Pr = 1.0$ . **Above:** pressure  $P/P_0$ . **Middle:** density  $\rho/\rho_0$ . **Bottom:** temperature  $T/T_0$ .

- [6] Y. Onishi, T. Tanaka, D. Ichieda and H. Miura: "On the treatment of strong evaporation and condensation flows of a vapor at the fluid dynamic level – Fluid dynamic formulation for phase change problems –, *Rarefied Gas Dynamics* to be published. [あるいは、また、大西善元:

「蒸発・凝縮過程を伴う非平衡流とその解析法」第50回理論応用力学講演会講演論文集 (パネルディスカッションPD5-3: 2001年1月) pp. 61–64.]

- [7] Y. Onishi and Y. Sone: "Kinetic theory of slightly strong evaporation and condensation – Hydrodynamic equation and slip boundary con-

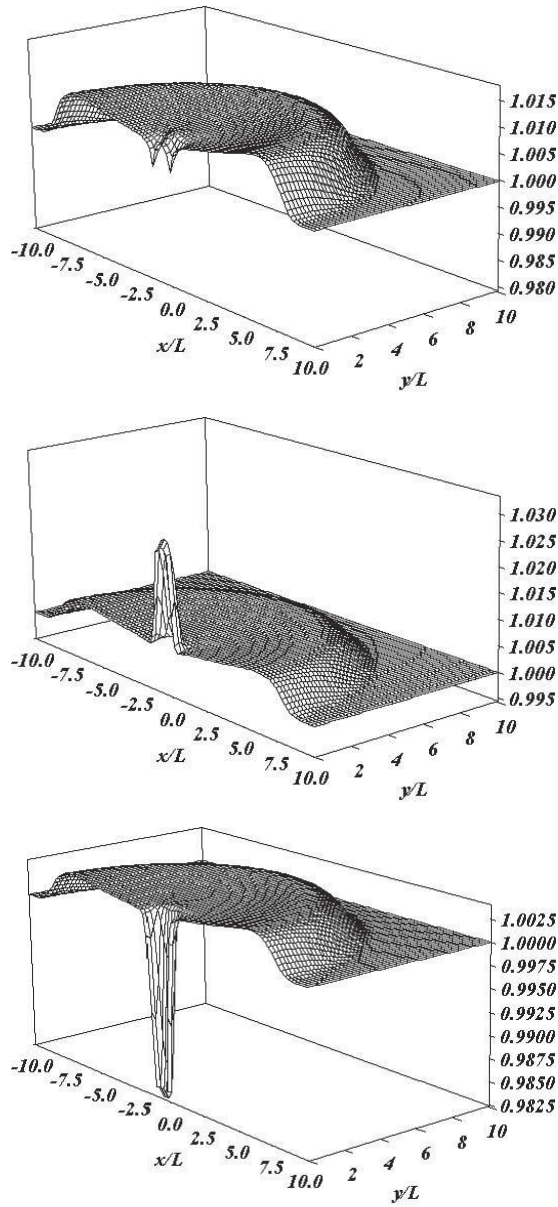


Fig. 5: The contours of the pressure, density and temperature at time  $t/\tau_0 = 10.0$ . The interface of the condensed phase is at  $y/L = 0$  and  $-0.5 \leq x/L \leq 0.5$ .  $T_c/T_0 = 1.5$ ,  $D/L = 0.1$ ,  $\Gamma = 11$ ,  $\lambda_c/\lambda_0 = 30.0$ ,  $\kappa_c/\kappa_0 = 0.32$ ,  $Re = 412.03$ ,  $(Kn = 0.005)$ ,  $Pr = 1.0$ . **Above:** pressure  $P/P_0$ . **Middle:** density  $\rho/\rho_0$ . **Bottom:** temperature  $T/T_0$ .

dition for finite Reynolds number –,” *J. Phys. Soc. Japan* **47** (1979) 1676–1685.

(受理 2006年11月30日)

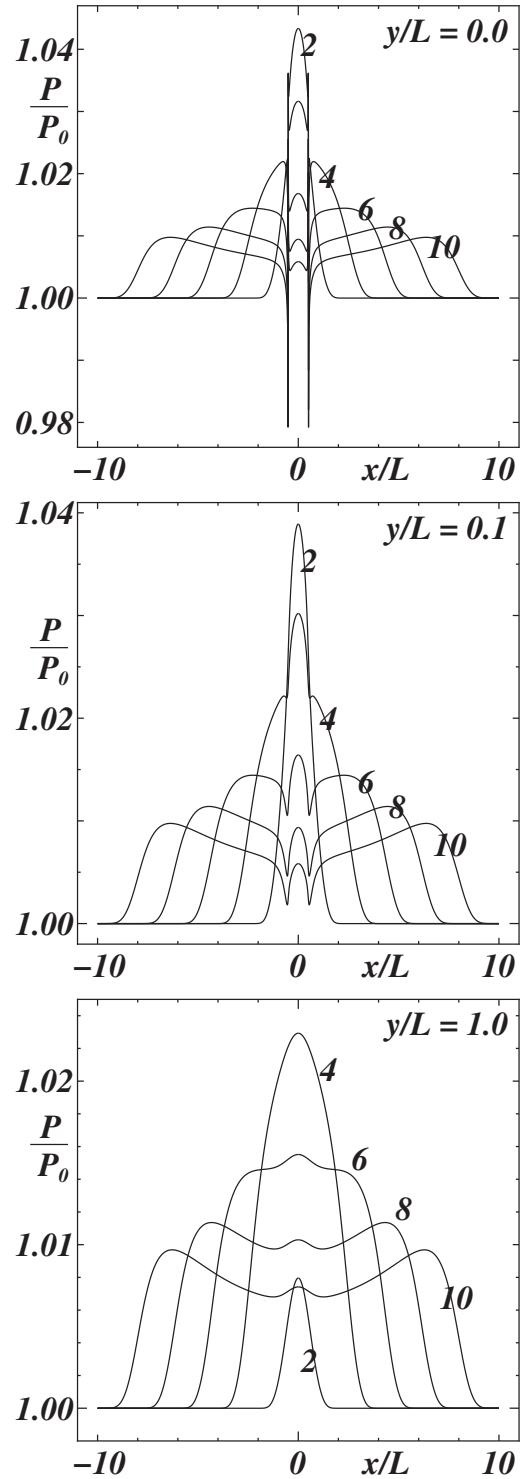


Fig. 6: The transient pressure distributions  $P/P_0$  at the sections of  $y/L = 0.0$ ,  $0.1$  and  $1.0$ , respectively. The interface of the condensed phase is at  $y/L = 0$  and  $-0.5 \leq x/L \leq 0.5$ .  $T_c/T_0 = 1.5$ ,  $D/L = 0.1$ ,  $\Gamma = 11$ ,  $\lambda_c/\lambda_0 = 30.0$ ,  $\kappa_c/\kappa_0 = 0.32$ ,  $Re = 412.03$ ,  $Pr = 1.0$ . The numbers in the figures indicate the time  $t/\tau_0$ .

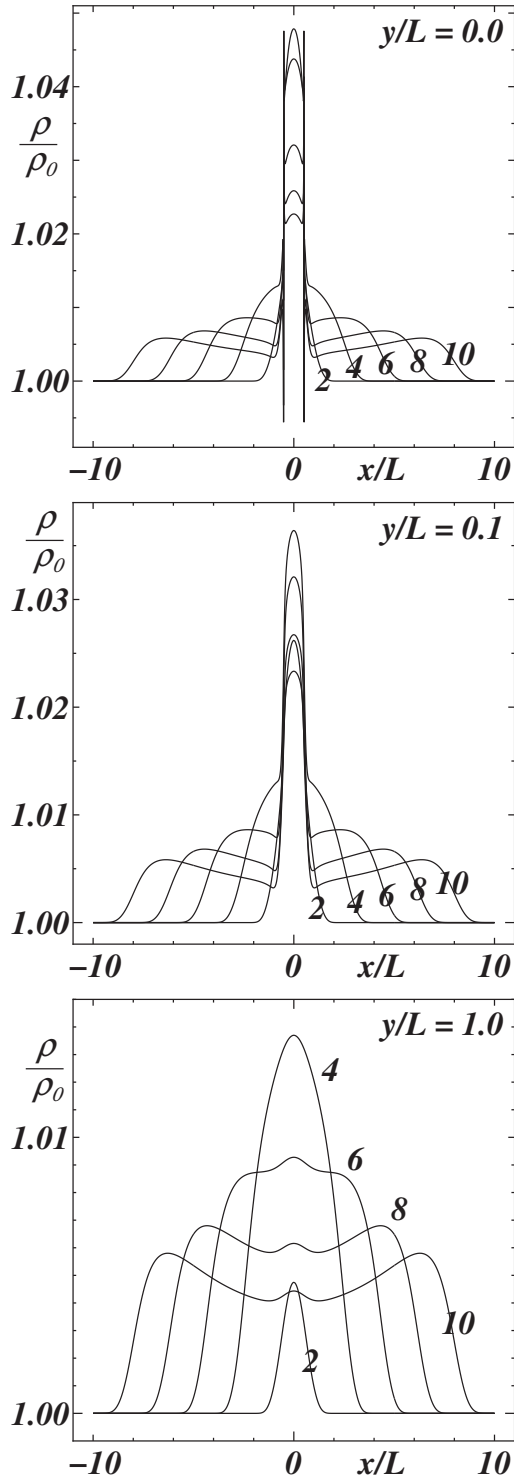


Fig. 7: The transient density distributions  $\rho/\rho_0$  at the sections of  $y/L = 0.0, 0.1$  and  $1.0$ , respectively. The interface of the condensed phase is at  $y/L = 0$  and  $-0.5 \leq x/L \leq 0.5$ .  $T_c/T_0 = 1.5$ ,  $D/L = 0.1$ ,  $\Gamma = 11$ ,  $\lambda_c/\lambda_0 = 30.0$ ,  $\kappa_c/\kappa_0 = 0.32$ ,  $Re = 412.03$ ,  $Pr = 1.0$ . The numbers in the figures indicate the time  $t/\tau_0$ .

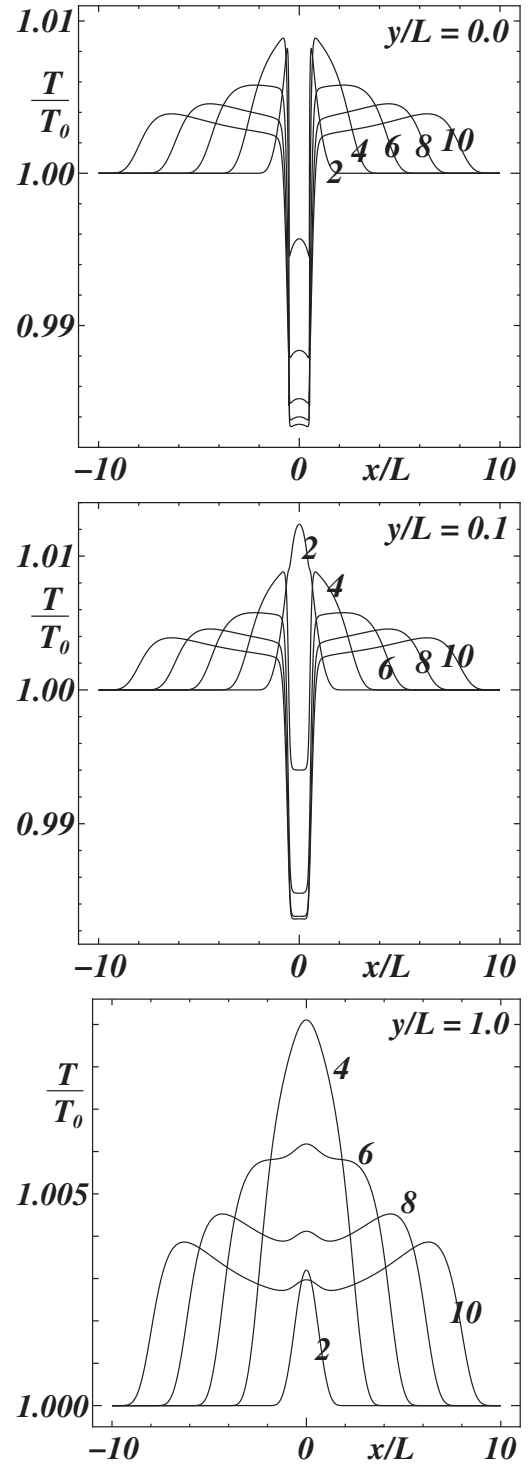


Fig. 8: The transient temperature distributions  $T/T_0$  at the sections of  $y/L = 0.0, 0.1$  and  $1.0$ , respectively. The interface of the condensed phase is at  $y/L = 0$  and  $-0.5 \leq x/L \leq 0.5$ .  $T_c/T_0 = 1.5$ ,  $D/L = 0.1$ ,  $\Gamma = 11$ ,  $\lambda_c/\lambda_0 = 30.0$ ,  $\kappa_c/\kappa_0 = 0.32$ ,  $Re = 412.03$ ,  $Pr = 1.0$ . The numbers in the figures indicate the time  $t/\tau_0$ .

